

# Analyse spectrale de réseaux de diffraction par la méthode des éléments finis : décomposition modale du champ électromagnétique diffracté

<sup>1,2</sup>B. Vial, <sup>1</sup>F. Zolla, <sup>1</sup>A. Nicolet, <sup>1</sup>M. Commandré et <sup>2</sup>S. Tisserand

1 : Institut Fresnel, Domaine universitaire de Saint Jérôme, 13397 Marseille cedex 20, France

2 : Silios Technologies, ZI Peynier-Rousset, rue Gaston Imbert Prolongée, 13790 Peynier, France

E-mail : benjamin.vial@fresnel.fr

**Résumé** — Nous calculons les fréquences propres de réseaux de diffraction par la méthode des éléments finis (FEM). En l'absence de pertes, ces structures ouvertes présentent des fréquences de résonance nécessairement complexes à cause des pertes par radiation. Les modes propres associés sont exponentiellement croissants à l'infini, ce qui est compensé numériquement par l'utilisation de PML. Ces "quasi-modes" satisfont une relation de bi-orthogonalité avec ceux d'un problème adjoint décrit par la suite. Munis de ces outils, nous montrons que le champ diffracté à une fréquence donnée peut se décomposer sur la base des modes propres, et les coefficients associés sont calculés simplement.

## I. INTRODUCTION

Le domaine d'application des réseaux de diffraction est vaste, et la compréhension de ces structures nécessite des méthodes de modélisation, qui sont aujourd'hui nombreuses. Parmi elles, la FEM est une méthode polyvalente puisqu'elle permet de traiter des géométries arbitraires et des matériaux aux propriétés tout à fait générales. Des travaux précédents [1] ont permis de développer une formulation capable de calculer le champ diffracté par ce type de structure. Pour des applications de filtrage spectral par exemple, il est nécessaire d'obtenir les efficacités de diffraction pour une grande plage spectrale. Afin d'éviter de réitérer le calcul FEM pour un grand nombre de fréquences, l'étude spectrale des réseaux est une approche judicieuse. Nous résolvons le problème aux valeurs propres associé, en utilisant des PML pour tronquer le domaine à mailler, et en appliquant des conditions de Bloch pour ne modéliser qu'une période du réseau. Afin de relier le problème de diffraction au problème spectral, nous proposons une méthode originale permettant le calcul du champ diffracté à partir de la connaissance des valeurs propres et des vecteurs propres du système.

## II. DÉFINITION DU PROBLÈME

### A. Problème de diffraction

On note  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{z}$  les vecteurs unitaires des axes du système de coordonnées orthogonal  $Oxyz$ , et le problème est considéré comme invariant selon  $Oz$ . Seul le régime harmonique sera ici abordé et les champs électriques et magnétiques seront par conséquent représentés par des vecteurs complexes notés  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{H}$  avec une dépendance temporelle choisie en  $e^{-i\omega t}$ . On note de plus  $k_0 := \omega/c$ . La formulation utilisée ici est celle utilisée par Demésy et al. [1], et permet le calcul du champ électromagnétique diffracté par des réseaux mono ou bi-périodiques de géométries arbitraires imbriqués dans un empilement multicouche, éclairés par une onde plane d'incidence et de polarisation quelconques. La résolution de ce problème par la FEM implique de déjouer les "problèmes d'infini", puisque cette dernière repose sur le maillage d'une cellule de dimensions finies.

– Selon  $Oz$  : c'est l'axe d'invariance du système.

- Selon  $Ox$  : il est possible de borner la cellule de calcul en ne considérant qu'une seule période du réseau (notée  $d$ ), et en imposant  $u(x+d, y) = u(x, y)e^{i\alpha d}$ .
- Selon  $Oy$  : le substrat et le superstrat sont des domaines non bornés. Par une transformation géométrique complexe bien choisie, on peut ramener ces infinis à distance finie grâce à l'utilisation de couches parfaitement adaptées (Perfectly Matched Layer, PML) et donc de borner ces deux régions selon  $Oy$ . Les PMLs peuvent être aussi vues comme des couches de matériaux fictifs aux propriétés anisotropes et absorbantes [2].
- Selon  $Oy$  : les sources de l'onde plane incidente étant à l'infini, on doit changer d'inconnue afin que les sources du problème soient dans le domaine de maillage.

Le type de structure  $d$ -périodique étudiée est décomposable en plusieurs sous domaines (cf. Fig. 1).

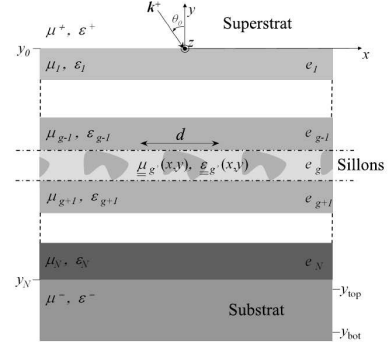


FIGURE 1. Schéma et notations de la structure étudiée

Cette structure est éclairée par une onde plane de vecteur d'onde  $\mathbf{k}^+ = \alpha\mathbf{x} + \beta^+\mathbf{y} = k^+(\sin\theta\mathbf{x} - \cos\theta\mathbf{y})$  dont le champ électrique (Transverse Électrique, TE ou polarisation-s) (resp. champ magnétique (Transverse Magnétique, TM ou polarisation-p)) est polarisé linéairement selon l'axe des  $z$ .

Dans le cas non conique, le problème de diffraction peut être décomposé en deux cas fondamentaux TE et TM. Il faut donc rechercher un champ électrique (resp. magnétique) polarisé linéairement selon l'axe des  $z$  :  $\mathbf{E} = e(x, y)\mathbf{z}$  (resp.  $\mathbf{H} = h(x, y)\mathbf{z}$ ). En notant

$$\underline{\underline{\delta}} = \begin{pmatrix} \delta_{xx} & \bar{\delta}_a \\ \delta_a & \delta_{yy} \end{pmatrix}, \text{ pour } \delta = \{\epsilon, \mu\} \quad (1)$$

la matrice  $2 \times 2$  extraite de  $\underline{\underline{\delta}}$ , les fonctions  $e$  et  $h$  sont solution d'équations différentielles semblables :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\xi, \chi}(u) := \operatorname{div}(\underline{\underline{\xi}} \cdot \nabla u) + k_0^2 \chi u = 0 \quad (2)$$

avec

$$u = e, \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\tilde{\mu}}}^T / \det(\underline{\underline{\tilde{\mu}}}), \quad \chi = \epsilon_{zz} \quad (3)$$

dans le cas TE,

$$u = h, \quad \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}^T / \det(\underline{\underline{\tilde{\epsilon}}}), \quad \chi = \mu_{zz} \quad (4)$$

dans le cas TM.

Sous sa forme initiale, le problème de diffraction associé à l'équation (2) est mal adapté aux éléments finis. Pour contourner cette difficulté, on décompose la fonction inconnue  $u$  en une somme de deux fonctions :

- $u_1$  correspondant au problème du simple empilement multicouche, donc supposée connue analytiquement.
- $u_2^d$  solution d'un problème radiatif dont les sources sont localisées dans l'élément diffractif  $\Omega_{g'}$ .

Ainsi, le problème équivaut à résoudre :

$$\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\underline{\underline{\xi}}, \chi}(u_2^d) = -\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\underline{\underline{\xi}}, \chi}(u_1) \quad (5)$$

où  $u_2^d$  satisfait une condition d'onde sortante, et est donc bien adaptée à l'utilisation des PML. Le membre de droite peut être considéré comme un terme source connu  $\mathcal{S}_1 := -\underline{\underline{\mathcal{L}}}_{\underline{\underline{\xi}}, \chi}(u_1)$  dont le support est borné par l'élément diffractif.

### B. Problème spectral

Le problème spectral revient à trouver les solutions des équations de Maxwell *sans sources*, i.e. trouver les valeurs propres  $\Lambda_n = (\omega_n/c)^2$  et les vecteurs propres non nuls  $v_n$  de l'opérateur de Maxwell  $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}$  tels que :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}(v_n) := -\operatorname{div}(\underline{\underline{\xi}} \cdot \nabla v_n) = \frac{\omega_n^2}{c^2} \chi v_n \quad (6)$$

Il est important ici de noter que les valeurs propres  $\omega_n$  sont généralement complexes, même si l'opérateur de Maxwell  $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}$  est formellement auto-adjoint pour des matériaux sans pertes. De même que dans la partie A, on utilise la décomposition en modes de Bloch afin de réduire le problème à une bande de largeur  $d$ , ce qui conduit à paramétrer l'opérateur en question par un coefficient de pseudo-périodicité  $\alpha$  réel.

Mathématiquement, le problème aux valeurs propres fait appel à l'analyse spectrale [3]. Pour des matériaux sans pertes, l'opérateur  $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}$  présente un spectre discret (les valeurs propres isolées réelles et positives), et un spectre continu (constitué de l'axe réel positif). L'emploi de PML infinies "révèle" le spectre dans le plan complexe (ce déplacement est relié aux paramètres choisis pour les PML), faisant apparaître des modes à fuites. Lorsqu'on tronque les PML, on obtient des modes issus de la discrétisation du spectre continu.

Nous définissons un produit scalaire de deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $L^2(\mathbb{R}^2)$  pondéré par la fonction  $\chi$  :

$$(f, g)_\chi := \int_{\mathbb{R}^2} \chi f \bar{g} \, dx dy \quad (7)$$

où  $\bar{z}$  désigne le complexe conjugué de  $z$ . Notons ici que les modes propres ne sont pas orthogonaux vis à vis de ce produit scalaire, c'est la raison pour laquelle nous considérons

aussi le problème spectral adjoint qui a pour valeurs propres  $\bar{\Lambda}_n = (\bar{\omega}_n/c)^2$  et dont les vecteurs propres sont notés  $w_n$ . L'opérateur adjoint  $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}^\dagger$  est défini par  $(\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}(f), g)_\chi = (f, \underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}^\dagger(g))_\chi, \forall f, g \in L^2(\mathbb{R}^2)$ , et est tel que  $\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}^\dagger = \underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}^*}$ , où  $A^* = \bar{A}$ . Le problème spectral adjoint s'écrit alors :

$$\underline{\underline{\mathcal{M}}}_{\underline{\underline{\xi}}}^\dagger(w_n) := -\operatorname{div}(\underline{\underline{\xi}}^* \cdot \nabla w_n) = \frac{\bar{\omega}_n^2}{c^2} \chi w_n \quad (8)$$

Après normalisation, les modes et les modes adjoints vérifient une relation de bi-orthogonalité :

$$(v_n, w_m)_\chi = \delta_{nm} \quad (9)$$

### III. DÉCOMPOSITION D'UN CHAMP DIFFRACTÉ SUR LA BASE DES VECTEURS PROPRES

Tout champ  $u_2^d$  solution de (5) peut se décomposer sur la base des vecteurs propres :

$$u_2^d = \sum_{n=1}^{+\infty} P_n v_n \quad (10)$$

On a alors  $P_n = (u_2^d, w_n)_\chi, \forall n \in \mathbb{N}^*$ . En introduisant la décomposition (10) dans (5), on obtient par projection sur le mode adjoint  $w_n$  :

$$P_n = \frac{c^2}{\omega_n^2 - \omega^2} J_n \quad (11)$$

avec

$$J_n = (\chi^{-1} \mathcal{S}_1, w_n)_\chi = \int_{\Omega_{g'}} \mathcal{S}_1 \bar{w}_n \, dx dy \quad (12)$$

L'expression des coefficients  $P_n$  est ainsi obtenue simplement grâce aux fréquences propres  $\omega_n$  et aux cartes de champs des vecteurs propres adjoints  $w_n$  calculés numériquement par la FEM, et ce pour un champ incident de coefficient  $\alpha$  fixé et de fréquence  $\omega$  quelconque (et éventuellement complexe). Ainsi pouvons-nous savoir comment les modes sont excités lorsqu'une onde plane de fréquence arbitraire éclaire un réseau.

### IV. EXEMPLES NUMÉRIQUES

Dans le papier complet nous présentons des exemples numériques dans les deux cas de polarisation. Nous comparons les champs issus de la décomposition modale avec ceux du problème de diffraction, et examinerons le comportement des coefficients de couplage  $P_n$  en fonction de  $\omega$ . Enfin, nous calculerons les efficacités de diffraction obtenues par les deux méthodes.

### RÉFÉRENCES

- [1] G. Demésy, F. Zolla, A. Nicolet, M. Commandré et C. Fossati, "The finite element method as applied to the diffraction by an anisotropic grating", *Opt. Express*, vol. 15, no. 26, pp. 118089–18102, 2007.
- [2] Y. Ould Agha, F. Zolla, A. Nicolet et S. Guenneau, "On the use of PML for the computation of leaky modes : an application to gradient index MOF", *COMPEL*, vol. 27, no. 1, pp. 95–109, 2008.
- [3] G. W. Hanson, A. B. Yakovlev, *Operator theory for electromagnetics : an introduction*, Springer-Verlag, New York (2002), pp. 327–333.